L2 SCIENCES

Mathématiques
Le cours en fiches

2e édition

- **152** fiches-méthodes
- **575** exercices corrigés
- Formulaire

Abdelaziz **El Kaabouchi**

ellipses

Chapitre 1

Structures algébriques (compléments)

1.1 Comment montrer qu'un élément d'un groupe est d'ordre fini ?

1.2 Comment montrer qu'un sous-groupe est engendré par une partie non vide ?

1.3 Comment montrer qu'un groupe est monogène ?

1.4 Comment montrer qu'un groupe est cyclique ?

1.5 Comment montrer qu'un sous-groupe d'un groupe est distingué (ou invariant) ?

1.6 Comment déterminer la signature d'une permutation ?

1.7 Comment montrer qu'un élément d'un anneau est nilpotent ?

1.8 Comment montrer qu'une partie d'un anneau est un idéal ?

1.9 Comment calculer dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

1.1 Comment montrer qu'un élément d'un groupe est d'ordre fini ?

Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e et soit $a \in G$.

Pour montrer que a est d'ordre fini, on montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$.

On appelle *ordre* de a, le plus petit entier naturel non nul n tel que $a^n = e$.

E X E M P L E

Soit $G_4 = \left\{z \in \mathbb{C},\ \ z^4 = 1\right\}=\{-1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}, 1\}$**.**

On sait que G_4 **muni de la multiplication est un groupe.**

Trouver l'ordre de chacun des éléments de G_4**.**

On a : $(-1)^4 = 1$, donc -1 est d'ordre fini, ici ordre$\,(-1) = 2$;

$\mathrm{i}^4 = 1$, donc i est d'ordre fini, ici ordre$\,(\mathrm{i}) = 4$;

$(-\mathrm{i})^4 = 1$, donc $(-\mathrm{i})$ est d'ordre fini, ici ordre$\,(-\mathrm{i}) = 4$.

Exercices

1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e et soit x un élément de G tel que $x^n = e$ pour un entier naturel n. Montrer que l'ordre de x divise n.
2. Soient $(G, \cdot)$ un groupe, x et y deux éléments de G.
   (a) Montrer que si x, y et xy sont d'ordre 2, alors $xy = yx$;
   (b) Montrer que si x est d'ordre fini, alors x^{-1} est d'ordre fini, de plus x et x^{-1} ont le même ordre ;
   (c) Montrer que si x est d'ordre fini alors yxy^{-1} est d'ordre fini, de plus x et yxy^{-1} ont le même ordre ;
   (d) Montrer que si xy est d'ordre fini alors yx est d'ordre fini, de plus xy et yx ont le même ordre.
3. Soient G, G' deux groupes, $f : G \to G'$ un morphisme de groupes, x un élément de G d'ordre fini et n l'ordre de x. Montrer que $f(x)$ est d'ordre fini dans G' et que l'ordre de $f(x)$ divise n.
4. Soit $(G, +)$ un groupe commutatif et T l'ensemble des éléments de G d'ordre fini. Montrer que T est un sous-groupe de G.
5. Trouver l'ordre de chacun des éléments de $\left((\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \times\right)$.

1.2 Comment montrer qu'un sous-groupe est engendré par une partie non vide ?

Soient $(G,*)$ un groupe, A une partie non vide de G et H un sous-groupe de G.

Pour montrer que H est engendré par A, on montre que pour tout $x \in H$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_n \in A$ et $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1,1\}$ tels que $x = a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n}$.

Autrement dit : $H = \{x = a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n},\ \ a_1, \cdots, a_n \in A, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1,1\}\}$.

E X E M P L E

Soient A, B deux sous-groupes d'un groupe G, on considère le sous-groupe S engendré par $A \cup B$.

Montrer que tout élément de S est obtenu comme produit d'une suite finie d'éléments appartenant alternativement à A et à B.

Soit $x \in S$, il existe donc $c_1, \cdots, c_n \in A \cup B$, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1,1\}$ tels que $x = c_1^{\varepsilon_1} c_2^{\varepsilon_2} \cdots c_n^{\varepsilon_n}$. On peut supposer que $c_1 \in A$, soit i_1 le plus grand entier de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ tel que $c_{i_1} \in A$; si $i_1 = n$ donc $x \in A$, sinon soit i_2 le plus grand entier de $\{i_1+1, \cdots, n\}$ tel que $x \in B$; si $i_2 = n$ alors $x = \alpha_1 \cdot \alpha_2$ avec $\alpha_1 = c_1^{\varepsilon_1} \cdots c_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}}$ et $\alpha_2 = c_{i_1+1}^{\varepsilon_{i_1+1}} \cdots c_n^{\varepsilon_n} \in B$, sinon soit i_3 le plus grand entier de $\{i_2+1, \cdots, n\}$ tel que $c_{i_3} \in A$; si $i_3 = n$ alors $x = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$ avec $\alpha_3 = c_{i_2+1}^{\varepsilon_{i_2+1}} \cdots c_n^{\varepsilon_n} \in A$ et ainsi de suite...

Il existe donc

$\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{2p+1} \in A$, $\alpha_2, \alpha_4, \cdots, \alpha_{2p} \in B$ tels que $x = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{2p}$ ou $x = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{2p-1} \cdot \alpha_{2p} \cdot \alpha_{2p+1}$.

Exercices

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le groupe S_n des permutations de $\{1, \cdots, n\}$ est engendré par les cycles de S_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que S_n est engendré par les transpositions.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que S_n est engendré par les $n-1$ transpositions suivantes : $(1,2)$, $(2,3)$,$\cdots$, $(n-1,n)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que S_n est engendré par $H = \{\tau, s\}$ où $\tau = (1,2)$ et $s = (1, 2, \cdots, n)$.

1.3 Comment montrer qu'un groupe est monogène ?

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Pour montrer que G est *monogène*, on montre qu'il existe $a \in G$ tel que G soit le sous-groupe engendré par $\{a\}$.

Autrement dit : Il existe $a \in G$ tel que $G = \{a^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

On remarque que tout *groupe monogène* est *commutatif.*

E X E M P L E

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et notons par $U_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$. On sait que U_n muni de la multiplication des nombres complexes est un groupe.

Montrer que U_n est monogène.

U_n est l'ensemble des racines n$^{\text{imes}}$ de l'unité. On a donc :

$$U_n = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \cdots, n-1\} \right\}.$$

Posons $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, on a pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = a^k$, d'où

$$U_n = \left\{ a^k, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Par suite U_n est un groupe monogène.

Exercices

1. Soient G, G' deux groupes et f un morphisme de groupes de G dans G'. Montrer que si G est monogène et f est surjectif, alors G' est un groupe monogène.
2. Soit G un groupe monogène engendré par un élément a de G. Montrer que si H est un sous-groupe de G non réduit à $\{0\}$, alors H est monogène et engendré par un élément a^m, où m est un entier positif.
3. Montrer que l'ensemble des entiers relatifs multiples de n est un groupe monogène engendré par n.
4. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe monogène.

1.4 Comment montrer qu'un groupe est cyclique ?

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Pour montrer que G est *cyclique*, on montre que G est monogène et fini. Autrement dit :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists a \in G \text{ tels que } : G = \left\{e, a, a^2, \cdots, a^n\right\}.$$

E X E M P L E

Montrer que $(((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}), \times)$ **est un groupe cyclique.**

Remarquons que $\bar{3} = \bar{8} = \bar{2} \times \bar{2} \times \bar{2} = (\bar{2})^3$ et $\bar{4} = \bar{2} \times \bar{2} = (\bar{2})^2$.

Il existe donc $n = 3$ tel que $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}) = \left\{\bar{1}, \bar{2}, (\bar{2})^2, (\bar{2})^3\right\}$.

Par suite $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \times)$ est un groupe cyclique.

Exercices

1. Soient G, G' deux groupes et f un morphisme de groupes de G dans G'.
   Montrer que si G est cyclique et f est surjectif, alors G' est un groupe cyclique.

2. Soit G un groupe fini. On appelle *ordre* de G, le nombre d'éléments de G. Montrer que si G est d'ordre un nombre premier alors G est cyclique.

3. Soient $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ deux groupes et $*$ la loi définie sur $G_1 \times G_2$ par :

   $$\forall (g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2, (g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$$

   (a) Montrer que $(G_1 \times G_2, *)$ est un groupe ;

   (b) Montrer que si G_1 est cyclique d'ordre n_1, G_2 est cyclique d'ordre n_2.
   Si de plus n_1 et n_2 sont premiers entre eux, alors $G_1 \times G_2$ est cyclique d'ordre $n_1 n_2$.

4. Montrer que $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \times)$ est un groupe cyclique.

1.5 Comment montrer qu'un sous-groupe d'un groupe est distingué (ou invariant) ?

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et H un sous-groupe de G.

Pour montrer que H est *invariant* ou *distingué*, on montre que pour tout $a \in G$, $aHa^{-1} \subset H$.

Autrement dit : $\forall a \in G$, $\forall x \in H$, $axa^{-1} \in H$.

Remarque

Si $(G, \cdot)$ est un groupe commutatif, tout sous-groupe de G est distingué.

E X E M P L E

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $x, y \in G$, $(xy)^n = x^n y^n$. On note $G^{(n)} = \{x^n, x \in G\}$.

a) Montrer que $G^{(n)}$ est un sous-groupe de G ;

b) Montrer que $G^{(n)}$ est distingué dans G.

a) Soient $x, y \in G^{(n)}$, montrons que $xy \in G^{(n)}$. Il existe $u, v \in G$ tel que $x = u^n$, $y = v^n$, comme $xy = u^n v^n = (uv)^n$ et $uv \in G$ car G est un groupe, donc $xy \in G^{(n)}$. Soit $x \in G^{(n)}$ et montrons que $x^{-1} \in G^{(n)}$. Il existe $u \in G$ tel que $x = u^n$, d'autre part comme $(u^n)^{-1} \cdot (u^n) = e_G$ et $\left(u^{-1}\right)^n \cdot u^n = \left(u^{-1}u\right)^n = e_G$ (e_G étant l'élément neutre de G), donc $(u^n)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^n$ d'où $x^{-1} = (u^n)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^n$ et par suite $x^{-1} \in G^{(n)}$. Par conséquent $G^{(n)}$ est un sous-groupe de G.

b) Soient $a \in G$ et $x \in G^{(n)}$, il existe donc $u \in G$ tel que $x = u^n$, et comme $axa^{-1} = au^n a^{-1} = \left(aua^{-1}\right)\left(aua^{-1}\right) \cdots \left(aua^{-1}\right) = \left(aua^{-1}\right)^n$ donc $axa^{-1} \in G^{(n)}$ et par suite $G^{(n)}$ est un sous-groupe distingué de G.

Exercices

1. Soient G, G' deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
   (a) Montrer que pour tout sous-groupe distingué H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de G ;
   (b) Montrer que si f est surjective, pour tout sous-groupe distingué H de G, $f(H)$ est un sous-groupe distingué de G.

*) Pour les exercices complémentaires : se reporter page : 187.

1.6 Comment déterminer la signature d'une permutation ?

Soit σ une permutation (un élément de S_n).

Pour déterminer la signature de σ, on décompose d'abord σ en produit de cycles dont les supports sont deux à deux disjoints (cette décomposition est unique), soit m le nombre de cycles formant cette décomposition.

La signature de σ est alors $(-1)^{n-m}$.

E X E M P L E

Déterminer la signature de la permutation σ de S_{10} définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 7 & 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Décomposons d'abord σ en produit de cycles dont les supports sont deux à deux disjoints. Pour cela, considérons les cycles suivants

$s_1 = (1, 3, 5)$, $s_2 = (2, 6, 4)$, $s_3 = (7)$, $s_4 = (8, 9)$ et $s_5 = (10)$

On a : $\sigma = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 \circ s_5$.

La signature de σ est alors $\mathrm{sig}(\sigma) = (-1)^{10-5} = (-1)^5 = -1$.

Exercices

1. Soit σ la permutation de S_5 définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Décomposer σ en produit de cycles à supports deux à deux disjoints ;
   (b) En déduire la signature de σ.

2. Calculer la signature de chacune des permutations suivantes

   (a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
   (b) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;
   (c) $\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) & n \\ n & (n-1) & (n-2) & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1.7 Comment montrer qu'un élément d'un anneau est nilpotent ?

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soit $a \in A$.

Pour montrer que a est *nilpotent*, on montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0_A$. (0_A étant l'élément neutre de $(A, +)$).

E X E M P L E

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients dans $\mathbb{R}$. On sait que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau.

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

Comme $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$, donc il existe $n = 2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ et par suite A est nilpotente.

Exercices

1. Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $x, y \in A$.
   (a) Montrer que si x est nilpotent alors $(1 - x)$ est inversible et calculer son inverse ;
   (b) Montrer que si xy est nilpotent alors yx l'est aussi.
   (c) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent alors $(x + y)$ est nilpotent.
2. Soient A, A' deux anneaux, f un morphisme d'anneau (voir tome 1) et $a \in A$.

   Montrer que si a est nilpotent dans A alors $f(a)$ est nilpotent dans A'.
3. On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +, \times)$.

   Déterminer les éléments nilpotents dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +, \times)$.
4. Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$, on considère les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 13 \\ -13 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que A et B sont nilpotentes.

1.8 Comment montrer qu'une partie d'un anneau est un idéal ?

Soient $(A,+,\times)$ un anneau et I une partie de A.

Pour montrer que I est un *idéal* de A, on montre que $(I,+)$ est un sous-groupe de A et $(IA \subset I)$ et $(AI \subset I)$. Autrement dit :

$$I \neq \emptyset,\ \forall x,y \in I,\ x-y \in I \text{ et } \forall x \in I, \forall y \in A,\ (xy \in I \text{ et } yx \in I) \quad (*).$$

Si l'anneau A est commutatif, la propriété $(*)$ peut être remplacée par

$$\forall x \in I, \forall y \in A, xy \in I.$$

E X E M P L E

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $I = \{nx, x \in \mathbb{Z}\}$ (l'ensemble des multiples de n) est un idéal de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$.

• $0 \in I$ donc $I \neq \emptyset$.

• Soient $x,y \in I$, il existe donc $k,k^{'} \in \mathbb{Z}$ tels que $x = nk$ et $y = nk^{'}$.

On a : $x - y = nk - nk^{'} = n(k-k')$ donc $(x-y) \in I$.

Comme $(\mathbb{Z},\times)$ est commutatif, il suffit de montrer que pour tout $x \in I$ et $y \in \mathbb{Z}$, $xy \in I$. Pour cela, soient $x \in I$ et $y \in \mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = kn$. On a : $xy = nky = n\,(ky)$, donc $xy \in I$. Par suite I est un idéal de $(\mathbb{Z},+,\times)$.

Exercices

1. Soient $(A,+,\times)$ un anneau, I et J deux idéaux de A.
   (a) Montrer que $I + J$ est un idéal de A ;
   (b) Montrer que $I + J$ est le plus petit idéal de A contenant $I \cup J$.
2. Soient $(A,+,\times)$ un anneau, I et J deux idéaux de A.
   On désigne par $I * J$ l'ensemble des u de A ayant la propriété suivante « Il existe $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $x_1, \cdots, x_n$ de n éléments de I et une famille $y_1, \cdots, y_n$ de n éléments de J tels que : $u = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ ».
   (a) Montrer que $I * J$ est un idéal de A ;
   (b) Montrer que $I * J \subset I \cap J$.
3. Soient $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ et $P_0\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes divisibles par P_0 dans $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire : $P_0\mathbb{R}[X] = \{P_0Q, Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
   Montrer que $P_0\mathbb{R}[X]$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 187.

1.9 Comment calculer dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Pour calculer dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on utilise les relations de compatibilité modulo n avec les lois $+$ et $\times$.

Autrement dit :

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left.\begin{array}{c} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a + c \equiv (b + d)\,[n] \\ ac \equiv bd\,[n] \end{array}\right.$$

$$(a \equiv b\,[n]) \Rightarrow (a^p \equiv b^p\,[n])\,.$$

E X E M P L E

Montrer que dans $\mathbb{Z}/111\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\overline{10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1} = \overline{0}$$

On remarque que $10^3 = 1000 = 1 + 9 \times 111$ donc $10^3 \equiv 1\,[111]$.

D'autre part

$$10^{6n+2} = \left(10^3\right)^{2n} \cdot 100 \equiv 1 \cdot 100\,[111]$$

$$10^{3n+1} = \left(10^3\right)^{n} \cdot 10 \equiv 1 \cdot 10\,[111]$$

Donc $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \equiv (100 + 10 + 1)\,[111]$

Par suite : $\overline{10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1} = \overline{0}$.

Exercices

1. Montrer que dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{3^{2n} + 2^{6n-5}} = \overline{0}$.
2. Dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, déterminer la classe de $(1341)^{2004}$.
3. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, déterminer la classe de $19^{52} \times 23^{41}$.
4. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^2$, $17\,|(2x + 3y) \Leftrightarrow 17\,|(9x + 5y)$.
5. Résoudre les équations suivantes
   (a) $x^2 + x + \overline{7} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$;
   (b) $x^2 - 4x + \overline{3} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Chapitre 2

Compléments sur les polynômes

2.1 Comment déterminer le PGCD de deux polynômes ?

Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On appelle polynôme *normalisé*, tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ qui a 1 comme coefficient du monôme le plus haut degré.

Pour déterminer le PGCD des polynômes A et B, on peut

• Soit décomposer en produits de facteurs premiers. Le PGCD est alors le produit (normalisé) des facteurs communs pris avec la plus grande puissance.

• Soit utiliser l'algorithme d'Euclide : on effectue les divisions euclidiennes ci-dessous :

$A = BQ_1 + R_1$; $B = R_1Q_2 + R_2$; $R_1 = R_2Q_3 + R_3$; ... ; $R_k = R_{k+1}Q_{k+2} + R_{k+2}$

Le PGCD de A et B est alors le dernier reste *non nul* (et normalisé).

E X E M P L E

Déterminer le PGCD des polynômes A et B suivants

$$A = X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + X - 1 \,;\, B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$$

L'utilisation de l'algorithme d'Euclide nous donne

	$1 = Q_1$	$-X^2 - 1 = Q_2$	$-X = Q_3$
A	$X^5 + X^4 + 2X^2 - 1 = B$	$-X^3 - X^2 + X = R_1$	$X^2 + X - 1 = R_2$
	$-X^3 - X^2 + X = R_1$	$X^2 + X - 1 = R_2$	0

Par suite, le PGCD des polynômes A et B est le polynôme :

$$D = R_2 = X^2 + X - 1.$$

Exercices

Déterminer dans chacun des cas suivants le PGCD des polynômes A et B.

1. $A = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$, $B = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$;
2. $A = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$, $B = 4X^3 + 6X^2 - 22X - 12$;
3. $A = X^3 + X^2 - X + 1$, $B = X^2 - X + 1$;
4. $A = X^{99} + 1$, $B = X^{45} + 1$;
5. $A = X^5 - X^4 - X^3 + 2X + 2$, $B = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 9X + 5$.

2.2 Comment montrer que a est racine d'ordre k d'un polynôme ?

Pour montrer que a est racine d'un polynôme P, on montre que $\tilde{P}(a) = 0$.

Pour montrer que a est racine d'ordre k d'un polynôme P, on montre que

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0.$$

E X E M P L E

1) **Montrer que 2 est une racine du polynôme** $P = X^2 - 5X + 6$.

2) **Soit** $P = X^6 + 3X^5 - 2X^4 - 16X^3 - 21X^2 - 11X - 2$.
Montrer que (-1) **est une racine du polynôme** P **et trouver son ordre de multiplicité.**

1) En effet : $\tilde{P}(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$.

2) On a $\tilde{P}(-1) = 1 - 3 - 2 + 16 - 21 + 11 - 2 = 0$, donc -1 est une racine de P. Calculons P', P'' et $P^{(3)}$. On a

$$\begin{aligned} P' &= 6X^5 + 15X^4 - 8X^3 - 48X^2 - 42X - 11, \\ P" &= 30X^4 + 60X^3 - 24X^2 - 96X - 42, \\ P^{(3)} &= 120X^3 + 180X^2 - 48X - 96, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \tilde{P}'(-1) &= -6 + 15 + 8 - 48 + 42 - 11 = 0, \\ \tilde{P}"(-1) &= 30 - 60 - 24 + 96 - 42 = 0 \\ \text{et } \tilde{P}^{(3)}(-1) &= -120 + 180 + 48 - 96 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc -1 est une racine de P d'ordre 3.

Exercices

1. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine -1 dans les polynômes suivants ?
   (a) $P = X^7 + 3X^6 + 3X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$;
   (b) $Q = X^5 + 7X^4 + 19X^3 + 25X^2 + 16X + 4$?
2. Trouver les racines du polynôme $X^5 - 1$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c pour que le polynôme $X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$ ait une racine d'ordre 4.
   Quelle est alors cette racine ?
   Quelles sont les autres racines ?

2.3 Comment montrer que deux polynômes sont premiers entre eux ?

Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour montrer que A et B sont *premiers entre eux*, on peut :

montrer qu'ils n'ont aucun diviseur irréductible commun ;

ou trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$;

ou montrer que le PGCD est égal à 1.

EXEMPLE

Dans chacun des cas suivants, montrer que les polynômes A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

a) $A = X^3 + 4X^2 + 5X + 2$, $B = X^3 + 2X^2 - 3X$;

b) $A = X^2 + X + 1$, $B = X + 1$;

c) $A = X^3 + X^2 - X + 1$, $B = X^2 - X + 1$.

a) On vérifie que : -1 et 2 sont les zéros de A. Les entiers 0, 1 et (-3) sont les zéros de B d'où $A = (X+1)^2(X+2)$; $B = X(X-1)(X+3)$. Il s'ensuit que A et B n'ont aucun diviseur irréductible commun, par conséquent les polynômes A et B sont premiers entre eux.

b) On remarque que $1A - XB = 1$, donc il existe $U = 1$, $V = -X$ des polynômes tels que $AU + BV = 1$, d'où A et B sont premiers entre eux.

c) D'après l'algorithme d'Euclide, (voir exercice 3. de la méthode 1), on a $\text{PGCD}(A, B) = 1$, donc A et B sont premiers entre eux.

Exercices

1. Dans chacun des cas suivants, montrer que les polynômes A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$. On déterminera des polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

   (a) $A = X^4 + 1$, $B = X^3 + 1$;

   (b) $A = X^5 + 1$, $B = X^2 + 1$.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 188

2.4 Comment déterminer le PPCM de deux polynômes ?

Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour déterminer le PPCM des polynômes A et B, le plus simple c'est de trouver le PGCD des polynômes A et B, puis on effectue la division euclidienne du polynôme $A \cdot B$ par le PGCD des polynômes A et B.

E X E M P L E

Trouver le PPCM des polynômes

$$A = X^5 - 5X^4 + 7X^3 + X^2 - 8X + 4,$$

$$B = X^4 + 2X^3 - 2X + 1.$$

Remarquons que -1 et 1 sont des racines de A et B ; ce qui nous permet de factoriser A et B. On trouve

$$A = (X-1)^2 (X-2)^2 (X+1) \quad \text{et} \quad B = (X+1)^3 (X-1).$$

Il s'ensuit que $\mathrm{PGCD}(A, B) = (X-1)(X+1)$.

Donc le PPCM des polynômes A et B est $M = (X-1)^2 (X+1)^3 (X-2)^2$.

Exercices

Déterminer le PPCM des polynômes A et B dans chacun des cas suivants

1. $A = X^2 - X + 1$, $B = X^2 - X + 2$;
2. $A = \left(X^2 - 2X + 1\right)(X+3)$, $B = (X-1)\left(X^2 + X + 1\right)$;
3. $A = \left(X^2 + X\right)\left(5X^2 - 1\right)$, $B = (X-1)\left(3X^2 + 3\right)$;
4. $A = X(X+3)\left(X^2 - 9\right)$, $B = \left(X^2 + 3X\right)(4X - 5)$;
5. $A = (6X-1)(X+2)^2$, $B = (X+2)\left(3X - \dfrac{1}{2}\right)$.

2.5 Comment utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange ?

Soient $(n+1)$ nombres réels ou complexes *distincts* $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ et $(n+1)$ nombres réels ou complexes quelconques $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}$.

On montre qu'il existe un unique polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de degré n tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, n+1\}$, on ait : $\tilde{P}(x_i) = y_i$.

Ce polynôme s'écrit : $P = \sum_{k=1}^{n+1} \left(y_k \prod_{i \neq k} \dfrac{X - x_i}{x_k - x_i} \right)$ et s'appelle polynôme *interpolateur de Lagrange* associé à (x_i, y_i) où $i \in \{1, \cdots, n+1\}$.

E X E M P L E

Déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que

$\tilde{P}(0) = 1$, $\tilde{P}(1) = 2$ et $\tilde{P}(2) = 3$.

On a $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ et $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.

$$P = \sum_{k=1}^{3} \left(y_k \prod_{i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i} \right)$$

$$P = y_1 \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$P = 1 \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} + 2 \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} + 3 \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)}$$

$$P = \frac{(X-1)(X-2)}{2} - 2X(X-2) + \frac{3}{2} X(X-1).$$

Exercices

1. Soient a, b, c des réels deux à deux distincts. Calculer dans $\mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $(X-a)(X-b)(X-c)$.

2. Généraliser le résultat de l'exercice 1 à une famille quelconque $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels deux à deux distincts.

3. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que le polynôme $P - \left(X^4 - 2X\right)$ soit divisible par $X(X-1)(X+1)$.

4. Trouver un polynôme P de degré 4 tel que le polynôme $P - \left(X^6 - 4X^3 + 1\right)$ soit divisible par $(X-2)(X-1)X(X+1)(X+2)$.

2.6 Comment utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme ?

Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et $x_1, \cdots, x_n$ ses racines, donc $P = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$.

Les relations entre les coefficients et les racines de P sont

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\ \sigma_2 = \sum_{1 \leq k < l \leq n} x_k x_l = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\sigma_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} = (-1)^r \frac{a_{n-r}}{a_n} \text{ et } \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

E X E M P L E

Soit $P = 2X^3 - X^2 - 7X + \alpha$ **avec** $\alpha \in \mathbb{C}$**.**

Déterminer α**, de façon que la somme de deux racines de** P **soit égale à 2.**

Avec les notations de la méthode, $a_3 = 2$, $a_2 = -1$, $a_1 = -7$, $a_0 = \alpha$.

La somme des trois racines de P étant $\sigma_1 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$, l'une des racines est égale à $\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, donc $P = \left(X + \frac{3}{2}\right)\left(2X^2 - 4X + \frac{2}{3}\alpha\right)$.

En développant P, on obtient $P = 2X^3 - X^2 + \left(-\frac{12}{2} + \frac{2}{3}\alpha\right) X + \alpha$, il s'ensuit que $-\frac{12}{2} + \frac{2}{3}\alpha = -7$, d'où $\alpha = -\frac{3}{2}$.

Exercices

1. Déterminer les racines de l'équation $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0$ sachant que la somme de deux de ses racines est égale à -1.
2. Déterminer les racines de l'équation $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0$ sachant que le produit de deux de ses racines est égale à -6.
3. Déterminer un nombre complexe a pour que l'équation
$$x^3 + 6x^2 - 6x + a = 0$$
admette deux racines dont la somme et le produit sont égaux.
Résoudre alors $x^3 + 6x^2 - 6x + a = 0$.

2.7 Comment montrer qu'une famille de polynômes est libre ?

Soit $P_0, \cdots, P_n$ une suite finie de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour montrer que la famille $P_0, \cdots, P_n$ est libre, il suffit de vérifier que les degrés des polynômes $P_0, \cdots, P_n$ sont deux à deux distincts.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq n\}$, on considère la suite de polynômes suivants :

$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(X-1)$,

$P_3 = X(X-1)(X-2)$, $P_k = X(X-1)(\cdots)(X-(k-1))$,

$P_{n-1} = X(X-1)(\cdots)(X-(n-2))$ et $P_n = X(X-1)(\cdots)(X-(n-1))$.

Montrer que la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarquons tout d'abord que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\deg(P_k) = k$, donc la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par ailleurs, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, il s'ensuit que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercices

1. Montrer que la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par :

$$P_k = (X-a)^k$$

   est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit P un polynôme de degré n, montrer que la famille $\left(P, P', \cdots, P^{(n)}\right)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$P_n = \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\cdots(X+n).$$

   Montrer que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Chapitre 3

Dualité

3.1 Comment montrer qu'une application est une forme linéaire ?

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et φ une application définie sur E.

Pour montrer que φ est une forme linéaire sur E, on montre que φ est à valeurs dans $\mathbb{K}$ et que φ est une application linéaire. Autrement dit

$(\forall x \in E,\ \varphi(x) \in \mathbb{K})$ et $(\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \varphi(x + \alpha y) = \varphi(x) + \alpha\varphi(y))$

L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^*.

E X E M P L E

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{R}$. On considère l'application φ définie sur E par

$$\forall P \in E, \varphi(P) = \tilde{P}''(1) + 3\tilde{P}'(0)$$

Montrer que φ est une forme linéaire.

Il est clair que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\tilde{P}'(0) \in \mathbb{R}$ et $\tilde{P}"(1) \in \mathbb{R}$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.

D'autre part, comme pour tout P, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(P + \alpha Q)''(1) = \tilde{P}''(1) + \alpha\tilde{Q}''(1) \quad \text{et} \quad (P + \alpha Q)''(0) = \tilde{P}''(0) + \alpha\tilde{Q}''(0),$$

donc $\varphi(P + \alpha Q) = \varphi(P) + \alpha\varphi(Q)$. Par suite φ est une forme linéaire sur E.

Exercices

1. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.
   (a) Soit $f_0 \in E$. Montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ qui à $f \in E$ associe $\varphi(f) = \int_0^1 f_0(t) f(t)\, dt$ est une forme linéaire sur E ;
   (b) Montrer que l'application δ de E dans $\mathbb{R}$ qui à $f \in E$ associe $\delta(f) = f(0)$ est une forme linéaire sur E.
2. L'espace $E = \mathbb{R}^n$ étant muni de sa base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$ et soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui associe à $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ le nombre $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Montrer que f est une forme linéaire sur E.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 188.

3.2 Comment montrer qu'un sous-espace vectoriel est un hyperplan ?

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de E.

Pour montrer que H est un hyperplan de E, il suffit de montrer que

$$\dim(H) = n - 1 \ ;$$

ou H est le noyau d'une forme linéaire non nulle ;

ou H est le supplémentaire dans E d'une droite vectorielle de E.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel, on considère le sous-ensemble H de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 2y + z = 0\right\}.$$

Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Première méthode : Comme $H = \{x(1, 0, -3) + y(0, 1, 2), x, y \in \mathbb{R}\}$, donc $H = \text{Vect}\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\}$. Il s'ensuit que H est de dimension 2 car les vecteurs $(1, 0, -3), (0, 1, 2)$ ne sont pas proportionnels et donc forment une base de H. Ainsi H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ $\left(\dim H = 2 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - 1\right)$.

Deuxième méthode : Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \mapsto & 3x - 2y + z \end{array}$$

On vérifie facilement que f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. D'autre part,

$$\text{Ker}(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 2y + z = 0\right\} = H,$$

donc H est le noyau d'une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$, par suite H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Troisième méthode : Remarquons que la famille $\{(1, 0, -3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, par suite

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\} \oplus \text{Vect}\{(0, 0, 1)\} = H \oplus \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}.$$

Donc H est le supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ d'une droite vectorielle, d'où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Exercices

Se reporter page : 188.

3.3 Comment déterminer l'orthogonal (par rapport à une forme linéaire) d'un sous-espace vectoriel ?

Soient E un espace vectoriel, L un sous-espace vectoriel de E.

Pour déterminer l'orthogonal de L (noté$L^{\perp}$), on cherche l'ensemble des formes linéaires φ telles que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in L$, c'est-à-dire

$$L^{\perp} = \{\varphi \in E^{*}, \forall x \in L, \varphi(x) = 0\}.$$

Quand E est de dimension finie, et si G est un sous-espace vectoriel de E^{*}, l'orthogonal de G est aussi : $G^{\perp} = \{x \in E^{*} : \forall \varphi \in G, \varphi(x) = 0\}$.

Voici quelques formules très utilisées

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^{*}$, F et G des sous-espaces vectoriels de E ou de E^{*}, on a

$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$ et $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - \dim(F)$

$$F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$$

$$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp} \text{ et } (\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}.$$

E X E M P L E

Soit L le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$u_1 = (1,3,-2,2), \quad u_2 = (1,4,-3,4) \quad \text{et} \quad u_3 = (2,3,-1,-2).$$

Déterminer $L^{\perp}$.

Cherchons d'abord une base de $L = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$. En essayant de voir si la famille (u_1, u_2, u_3) est libre ou liée, on s'aperçoit que :

$$u_3 = -3u_2 + 5u_1 = 2u_2 - 5(u_2 - u_1)$$

Ainsi $L = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$.

Posons $v_1 = u_1 = (1,3,-2,2)$ et $v_2 = u_2 - u_1 = (0,1,-1,2)$, on en déduit que (v_1, v_2) est une base de L et $\dim\left(L^{\perp}\right) = 4 - 2 = 2$.

*) Pour la suite du corrigé de l'exemple, se reporter page : 241.

Exercices

Se reporter page : 189.

3.4 Comment utiliser l'orthogonalité ?

Soit E un espace vectoriel. Dans certains cas, pour démontrer une propriété (P) dans E, il est parfois plus simple de démontrer la propriété (P^*) c'est-à-dire celle qui traduit la propriété (P) dans l'espace dual E^*.

Voir formules dans l'énoncé de la méthode précédente.

E X E M P L E

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dans $\mathbb{R}_n[X]$, on considère les polynômes

$$P_0 = X^n, P_1 = (X+1)^n, ..., P_n = (X+n)^n.$$

Montrer que la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Posons $V = \text{Vect}\{P_0, \cdots, P_n\}$, alors $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de E si et seulement si $E = V$ si et seulement si $V^\perp = \{0\}$.

Soit donc $f \in V^\perp$ et montrons que $f = 0$. On a

$$f \in V^\perp \Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}, f(P_k) = 0)$$

Or pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $f(P_k) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^j f\left(X^{n-j}\right) = 0$.

Donc $f \in V^\perp$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^2 & \cdot & 0^n \\ 1 & 1 & 1^2 & \cdot & 1^n \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdot & 2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n & n^2 & \cdot & n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{n}{0} f(X^n) \\ \binom{n}{1} f\left(X^{n-1}\right) \\ \\ \\ \binom{n}{n} f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posons $M = \left(k^j\right)_{k,j}$, $M' = \left(k^j\right)_{k,j \in \{1, \cdots, n\}}$, $\det(M')$ est un déterminant de Van der Monde et on a : $\det(M) = \det(M') = 1$, donc $\det(M) \neq 0$.

Par suite pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}, f\left(X^k\right) = 0$.

Par conséquent $f = 0$.

Exercices

Dans$(\mathbb{R}_n[X])^*$, on considère les formes linéaires $(f_i)_{i \in \{0, \cdots, n\}}$ définies par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f_i(P) = P(i).$$

Montrer que la famille $(f_0, f_1, \cdots, f_n)$ forme une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

3.5 Comment déterminer la base duale d'une base donnée ?

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

Pour déterminer la base duale de $(e_1, \cdots, e_n)$, on considère la famille des formes linéaires $(f_1, \cdots, f_n)$ définies par :

$$(f_i(e_k) = 0 \text{ si } i \neq k) \text{ et } (f_i(e_k) = 1 \text{ si } i = k).$$

Autrement dit

f_i est l'application qui au vecteur x associe sa i^{ime} coordonnée dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (i, j, k), on considère la base de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$e_1 = i + j + k, \quad e_2 = i - k \quad \text{et} \quad e_3 = j + k.$$

Déterminer la base duale de (e_1, e_2, e_3).

Soit (f_1, f_2, f_3) la base duale de (e_1, e_2, e_3), on a :

$$f_1(e_1) = 1 \text{ et } f_1(e_2) = f_1(e_3) = 0.$$

Si $u = xi + yj + zk$ alors $f_1(u) = xf_1(i) + yf_1(j) + zf_1(k)$.

Or

$$\begin{cases} f_1(e_1) & = & 1 \\ f_1(e_2) & = & 0 \\ f_1(e_3) & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(i) & + & f_1(j) & + & f_1(k) & = & 1 \\ f_1(i) & & & - & f_1(k) & = & 0 \\ & & f_1(j) & + & f_1(k) & = & 0 \end{cases}$$

D'où $f_1(i) = f_1(k) = 1$ et $f_1(j) = -1$.

Par suite $f_1(u) = x - y + z$.

Avec la même démarche, on obtient $f_2(u) = y - z$ et $f_3(u) = -x + 2y - z$.

La base duale de (e_1, e_2, e_3) est donc donnée par les formes linéaires f_1, f_2, et f_3 définies par

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f_1(u) = x - y + z, \quad f_2(u) = y - z \quad \text{et} \quad f_3(u) = -x + 2y - z.$$

Exercices

Se reporter page : 189

3.6 Comment déterminer la base préduale d'une base donnée ?

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, E^* son dual, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(l_1, \ldots, l_n)$ une base de E^*. On sait qu'il existe une unique base $(u_1, \ldots, u_n)$ de E dont la base duale est $(l_1, \ldots, l_n)$.

Pour déterminer $(u_1, \ldots, u_n)$, on considère d'abord la matrice P qui a pour *lignes* les coordonnées des formes linéaires $(l_1, \ldots, l_n)$ dans la base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$, puis on calcule son inverse P^{-1}, enfin on écrit : $u_k = \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ik} e_i$: le k^{ime} uplet $(q_{1k}, \ldots, q_{nk})$ étant les coordonnées du k^{ime} vecteur colonne de P^{-1}.

E X E M P L E

Soient l_1, l_2, l_3 les formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ définies par

$$l_1(x, y, z) = x + y + 3z, \quad l_2(x, y, z) = 5x - y + z \text{ et } l_3(x, y, z) = x - y - z$$

a) Montrer que (l_1, l_2, l_3) est une base de l'espace dual $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$;

b) Trouver la base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ dont la base duale est (l_1, l_2, l_3).

a) Notons par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, (e_1^*, e_2^*, e_3^*) la base duale de (e_1, e_2, e_3) et P la matrice dont les lignes sont les coordonnées des formes linéaires l_1, l_2, l_3 dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*).

On a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\det P = -4 \neq 0$, donc (l_1, l_2, l_3) est libre et par suite une base de E^*.

En calculant P^{-1}, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

b) D'où : $u_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$, $u_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $u_3 = \left(-1, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

On vérifie que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ dont la base duale est (l_1, l_2, l_3).

Exercices

Se reporter page : 190.

3.7 Comment déterminer la transposée d'une application linéaire ?

Soient E, F deux espaces vectoriels et h une application linéaire de E dans F. La transposée de h notée ${}^t h$ est l'application linéaire de F^* dans E^* définie par

$$\forall \psi \in F^*, {}^t h(\psi) = \psi \circ h.$$

Quand E et F sont de dimension finie ayant pour bases respectivement $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_p)$, la matrice de ${}^t h$ relativement aux bases duales $\left(f_1^*, \cdots, f_p^*\right)$, $(e_1^*, .., e_n^*)$ est la transposée de la matrice de h relativement aux bases $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_p)$.

E X E M P L E

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\left(1, X, X^2\right)$, on considère l'application linéaire h de E dans E définie par

$$h(P) = (X+1)P' + P$$

Déterminer la transposée de h.

La matrice de h relativement aux bases canoniques est

$$M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La transposée de $M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est ${}^t M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc ${}^t h$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ relativement aux bases duales.

Exercices

1. Soit φ la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ définie par : $\varphi(x, y) = 3x - 2y$.
   Pour chacune des applications linéaires $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ suivantes, trouver ${}^t T(\varphi)$.
   (a) $T(x, y, z) = (x + 2y, y + z)$;
   (b) $T(x, y, z) = (2x + y + z, x - y)$.

*) Pour la suite des exercices, se reporter page : 190.

3.8 Comment trouver un sous-espace supplémentaire d'un hyperplan ?

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et H un hyperplan de E.

Pour trouver un sous-espace supplémentaire de H, il suffit de trouver un vecteur x qui n'appartient par à H, puis on considère la droite : $D = \text{Vect}(x) = \{\lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

D est alors un sous-espace supplémentaire de H dans E.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-espace vectoriel H défini par

$$H = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

Trouver un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Soit f la forme linéaire de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4.$$

On remarque que $H = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\right\} = \text{Ker}(f)$, donc H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

Soit $\vec{u} = (0, 0, 0, 1)$, il est clair que $f(\vec{u}) \neq 0$ donc $\vec{u} \notin H$, posons $D = \text{Vect}(\vec{u})$, D est alors un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère le sous-espace vectoriel H défini par

   $$H = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X], \tilde{P}(0) + 3\tilde{P}'(0) - 2\tilde{P}''(0) + 4\tilde{P}^{(3)}(0) = 0\right\}.$$

   Trouver un sous-espace supplémentaire de H dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ quatre nombres réels non nuls et soit H le sous ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

   $$H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda t = 0\right\}.$$

   Trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.
3. Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, x_0, x_1, x_2, x_3 des réels deux à deux distincts et considérons le sous-ensemble H de E défini par

   $$H = \left\{P \in E,\ \ \tilde{P}(x_0) - 2\tilde{P}(x_1) + 3\tilde{P}(x_2) - \tilde{P}(x_3) = 0\right\}.$$

   Trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de H dans E.

3.9 Comment montrer qu'une famille de formes linéaires est libre dans l'espace dual d'un espace vectoriel de dimension finie ?

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \cdots, f_p)$ une famille d'éléments de E^* (avec $p \leq n$ sinon $(f_1, \cdots, f_p)$ est liée).

Pour montrer que $(f_1, \cdots, f_p)$ est libre dans E^*, on décompose d'abord chacune des f_i dans la base duale $B^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$, puis on utilise les résultats généraux d'algèbre linéaire.

E X E M P L E

Soient f_1, f_2, f_3 les formes linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définies par

$$f_1(x,y,z) = x - 3y + z, f_2(x,y,z) = x + 2y - z, f_3(x,y,z) = 2x - y + z.$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ sa base duale.

On a : $e_1^*(x,y,z) = x$, $e_2^*(x,y,z) = y$, $e_3^*(x,y,z) = z$.

Donc $f_1 = e_1^* - 3e_2^* + e_3^*$, $f_2 = e_1^* + 2e_2^* - e_3^*$, $f_3 = 2e_1^* - e_2^* + e_3^*$.

Il s'ensuit que

$$\det_{B^*}(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 - 1 - 4 - 1 + 3 = 5 \neq 0.$$

Par conséquent (f_1, f_2, f_3) est libre dans $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.

Exercices

1. Soient f_1, f_2, f_3 les formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3) &= x_2 + x_3 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ f_3(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

   (a) Montrer que les formes linéaires suivantes forment une base de E^* ;

   (b) Déterminer la base préduale de (f_1, f_2, f_3).

*) Pour la suite des exercices, se reporter page : 191.

Chapitre 4

Réduction des endomorphismes et des matrices

4.12 Comment montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable en utilisant le polynôme minimal ?

4.13 Comment diagonaliser une matrice carrée ?

4.14 Comment calculer les puissances d'une matrice diagonalisable ?

4.15 Comment résoudre certains systèmes de suites récurrentes ?

4.16 Comment résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants ?

4.17 Comment montrer qu'une matrice ou un endomorphisme est trigonalisable ?

4.1 Comment déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice ?

Soit M une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour déterminer le polynôme caractéristique de M, on forme d'abord la matrice $(M - XI_n)$ puis, on calcule le polynôme $P_M(X)$ défini par :

$$P_M(X) = \det(M - XI_n).$$

E X E M P L E

Déterminer le polynôme caractéristique associé à la matrice ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à la matrice A est

$$\begin{aligned} P_A(X) = \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 2 \\ 2 & 1-X & 1 \\ 1 & 3 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)^2(3-X) - 5(1-X) + 12 \end{aligned}$$

ou encore : $P_A(X) = (1-X)^2(3-X) - 5(1-X) + 12$.

Exercices

Déterminer le polynôme caractéristique associé à chacune des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} -15 & -19 & -13 \\ 10 & 13 & 8 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & 1 \\ \mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$;
3. $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 3-\alpha & -5+\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha-2 & \alpha \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$;

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 192.

4.2 Comment déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ?

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

Pour déterminer le polynôme caractéristique de f, on forme d'abord la matrice A de f par rapport à une base de E, puis on calcule le polynôme caractéristique de A, qui est $P_A(X) = \det(A - XI_n)$.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2)$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\forall u = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2, f(u) = (3x - y) e_1 + (x + 2y) e_2.$$

Déterminer le polynôme caractéristique de f.

Formons d'abord la matrice A de f dans la base B. Pour cela, on calcule $f(e_1)$ et $f(e_2)$. On a

$$f(e_1) = 3e_1 + e_2,\ f(e_2) = -e_1 + 2e_2, \text{ d'où : } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de f est donc

$$P_A(X) = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 3 - X & -1 \\ 1 & 2 - X \end{vmatrix} = (3 - X)(2 - X) + 1.$$

Exercices

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = 2XP' - X^2P" + P.$$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$;

   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de f.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y + z, x + 2y - z, x + 3y + z).$$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$;

   (b) Déterminer le polynôme caractéristique de f.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 192.

4.3 Comment montrer qu'un scalaire est une valeur propre d'un endomorphisme ?

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et λ un scalaire.

Pour montrer que λ est une valeur propre de f, on procède comme suit :

Si E est de dimension finie, on vérifie que λ est une racine du polynôme caractéristique de f, *sinon*, on trouve un vecteur *non nul* u de E tel que : $f(\lambda u) = \lambda u$.

E X E M P L E

Déterminer les valeurs propres des endomorphismes suivants

a) f **de** $\mathbb{R}[X]$ **défini par :** $f(P) = \left(X^3 + X\right) P' - \left(3X^2 - 1\right) P$ **;**
b) g **de** $\mathbb{R}^2$ **défini par :** $g(x, y) = (x + y, x + 2y)$**.**

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre de f si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que : $f(P) = \lambda P$.
Considérons donc un polynôme $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ avec $a_n \neq 0$, on a : $f(P) = \lambda P$ si et seulement si

$$(n-3)\, a_n X^{n+2} + \ldots = \lambda(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0),$$

d'où : $n = 3$. Il s'ensuit que
$f(P) = -a_2 X^4 + (3a_3 + a_1 - 3a_1 + a_3) X^3 + (2a_2 - 3a_0 + a_2) X^2 + 2a_1 X + a_0$.
Après calcul, on trouve

$$f(P) = \lambda P \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} -a_2 & = & 0 \\ 4a_3 - 2a_1 & = & \lambda a_3 \\ 3a_2 - 3a_0 & = & \lambda a_2 \\ 2a_1 & = & \lambda a_1 \\ a_0 & = & \lambda a_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} -a_2 & = & 0 \\ (4-\lambda) a_3 & = & 2a_1 \\ a_0 & = & 0 \\ (2-\lambda) a_1 & = & 0 \\ (1-\lambda) a_0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 4 \Rightarrow a_3 = a_1 = 0$ et comme $(a_0 = a_2 = 0)$, donc $P = 0$.
Si $\lambda = 2$, le polynôme $P = X^3 + X$ vérifie $f(P) = 2P$.
Si $\lambda = 4$, le polynôme $P = X^3$ vérifie $f(P) = 4P$.
Donc les valeurs propres de f sont $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$.

*) Pour la suite du corrigé de l'exemple, se reporter page : 208.

Exercices

Se reporter page : 192.

4.4 Comment montrer qu'un scalaire est une valeur propre d'une matrice ?

Soient A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pour montrer que λ est une valeur propre de A, on montre que λ est une racine du polynôme caractéristique de A, ou encore il existe une matrice uni-colonne X telle que : $AX = \lambda X$.

E X E M P L E

Trouver les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ **de** $M_3(\mathbb{R})$**.**

Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 0-X & 1 & -1 \\ 1 & 4-X & -2 \\ 2 & 6 & -3-X \end{vmatrix}.$$

Après calcul, on trouve : $P_A(X) = (1-X)\left(X^2+1\right)$.

Donc la seule valeur propre de A est $\lambda_1 = 1$.

Exercices

Trouver les valeurs propres des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} -15 & -19 & -13 \\ 10 & 13 & 8 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
2. $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -12 & 6 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.5 Comment reconnaître un vecteur propre d'un endomorphisme ou d'une matrice ?

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, f un endomorphisme de E et u un vecteur de E. Pour montrer que u est un *vecteur propre* de f, il suffit de vérifier que $u \neq 0$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f(u) = \lambda u$.

Soient A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et u un vecteur de $\mathbb{K}^n$. Pour montrer que u est un *vecteur propre* de A, il suffit de vérifier que $u \neq 0$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $AU = \lambda U$ (U étant la matrice unicolonne associé à u).

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs : $e_1 + e_3$, $e_1 - e_3$ et e_2 sont des vecteurs propres de f.

On voit bien que :

- $f(e_1 + e_3) = (e_1 + e_3) + (e_1 + e_3) = 2(e_1 + e_3)$, donc il existe $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(e_1 + e_3) = \lambda(e_1 + e_3)$;

- $f(e_1 - e_3) = (e_1 + e_3) - (e_1 + e_3) = 0 \cdot (e_1 - e_3)$, donc il existe $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(e_1 - e_3) = \lambda(e_1 - e_3)$;

- $f(e_2) = e_2$, donc il existe $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_2) = \lambda(e_2)$.

Par suite $e_1 + e_3$, $e_1 - e_3$ et e_2 sont des vecteurs propres de f.

Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans B est : $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Montrer que les vecteurs $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ et $(1, 0, 1)$ sont des vecteurs propres de f.

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 192.

4.6 Comment déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre ?

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

Pour déterminer le sous-espace propre associé à λ, on résout $f(u) = \lambda u$, d'incon- nue u. Le sous-espace propre associé à λ est alors le sous-espace vectoriel de E engendré par l'ensemble des solutions de cette équation.

Soient A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et λ une valeur propre de A. Pour déterminer le sous-espace propre associé à λ, on résout l'équation $AX = \lambda X$ ou $(A - \lambda I_n)X = 0$ d'inconnue X. Le sous-espace propre associé à λ est alors le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par l'ensemble des solutions de cette équation.

E X E M P L E

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est : $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

- **a) Montrer que le réel $\lambda = -1$ est une valeur propre ;**
- **b) Trouver le sous-espace propre associé à $\lambda = -1$.**

a) On a : $M(f) - (-1)\, I_3 = M(f) + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, donc $\det(M(f) + I) = 0$, d'où $\lambda = -1$ est une valeur propre de f.

b) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur propre associé à $\lambda = -1$, on a :

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 4x + 3y - 2z & = & 0 \\ 8x + 6y - 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x + 3y - 2z = 0$$

Le sous-espace propre associé à $\lambda = -1$ est donc le plan d'équation

$$4x + 3y - 2z = 0.$$

Exercices

Se reporter page : 193.

4.7 Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (1) ?

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour montrer qu'un endomorphisme f de E est diagonalisable, on peut montrer que f admet n valeurs propres distinctes.

Pour montrer qu'une matrice carrée M d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable, on peut montrer que M admet n valeurs propres distinctes.

E X E M P L E

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est diagonalisable.

Calculons les valeurs propres de f. Pour cela, on calcule $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$, puis on résout l'équation $P_M(\lambda) = 0$ d'inconnue λ. On a

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{c_1 \leftarrow c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 3-\lambda & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

D'où $P_M(\lambda) \underset{\substack{l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \\ l_2 \leftarrow l_2 - l_1}}{=} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda-2 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda-1)(-\lambda-2).$

Donc f admet pour valeurs propres les réels $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 3$. Par suite f est diagonalisable.

Exercices

Montrer que les matrices carrées suivantes sont diagonalisables

1. $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$;
4. $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.8 Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (2) ?

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer qu'un endomorphisme f de E est diagonalisable, il suffit de trouver une base de E formée que de vecteurs propres.

Pour montrer qu'une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable, il suffit de trouver une base de $\mathbb{K}^n$ formée que de vecteurs propres.

E X E M P L E

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est : $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est diagonalisable.

Calculons d'abord les valeurs propres de f.

Pour cela, on calcule $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$ puis on résout l'équation $P_M(\lambda) = 0$ d'inconnue λ. On a

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -1 \\ -4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Donc les valeurs propres de f sont : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$. Remarquons que

• $f(e_2 + 2e_3) = 4e_2 + 2(-e_2 + 2e_3) = 2(e_2 + 2e_3)$, donc $(e_2 + 2e_3)$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$;

• $f(e_1 - 2e_3) = 4e_1 - 2e_2 - 4e_3 - 2(-e_2 + 2e_3) = 4(e_1 - 2e_3)$, et $f(e_2) = 4e_2$, donc $(e_1 - 2e_3)$ et e_2 sont des vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 4$.

D'autre part $\mathrm{Det}_B(e_2 + 2e_3, e_1 - 2e_3, e_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc la famille $(e_2 + 2e_3, e_1 - 2e_3, e_2)$ est une base de vecteurs propres et par suite f est diagonalisable.

Exercices

Se reporter page : 193.

4.9 Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (3) ?

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour montrer qu'un endomorphisme de E est diagonalisable, on peut montrer que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

Pour montrer qu'une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable, on peut montrer que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

E X E M P L E

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est diagonalisable.

Calculons les valeurs propres de f. Pour cela, on calcule $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_4)$, puis on résout l'équation $P_M(\lambda) = 0$ d'inconnue λ. On a

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}, \text{ donc}$$

$P_M(\lambda) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)^2$.

Les valeurs propres de M sont donc donc $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. Cherchons ensuite les dimensions des sous-espaces propres de f.

Pour $\lambda = 1$,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $((1,0,0,0)\ ,\ (0,-1,1,-1))$ est une base de E_1, d'où $\dim(E_1) = 2$.

*) Pour la suite du corrigé de l'exemple, se reporter page : 268.

Exercices

Se reporter page : 194.

4.10 Comment montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou une matrice carrée est diagonalisable (4) ?

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer qu'un endomorphisme f de E est diagonalisable, on peut montrer que E est une somme directe des sous-espaces propres de f. En fait, f est diagonalisable si et seulement si E est une somme directe des sous-espaces propres de f.

Pour montrer qu'une matrice carrée M d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable, on peut montrer que $\mathbb{K}^n$ est une somme directe des sous-espaces propres de M. En fait, M est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n$ est une somme directe des sous-espaces propres de M.

E X E M P L E

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est : $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que f est diagonalisable.

Calculons les valeurs propres de f. Pour cela, on calcule $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$, puis on résout l'équation $P_M(\lambda) = 0$ d'inconnue λ. On a

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(\lambda+3).$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -3$. Montrons que $\mathbb{R}^3$ est somme directe des sous-espaces propres de f. Pour tout $(x, y, z) \in E$, on a

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$$
$$(x, y, z) \in E_{-3} \Leftrightarrow (5x - 2y + z = 0 \text{ et } 2x + 2z = 0) \Leftrightarrow (z = -x \text{ et } y = 2x).$$

D'autre part, pour tout $(x, y, z) \in E$,

$$(x, y, z) = \frac{1}{4}(-x + 2y - z)(1, 2, -1) + \frac{1}{4}(5x - 2y + z, 2x + 2z, -x + 2y + 3z),$$

$$\frac{1}{4}(-x + 2y - z)(1, 2, -1) \in E_{-3} \text{ et } \frac{1}{4}(5x - 2y + z, 2x + 2z, -x + 2y + 3z) \in E_1$$

Donc $E = E_1 + E_{-3}$. Par ailleurs, $E_1 \cap E_{-3} = \{0\}$ d'où $E = E_1 \oplus E_{-3}$.

Par suite f est diagonalisable.

Exercices

Se reporter page : 194.

4.11 Comment déterminer le polynôme minimal d'un endomorphisme ?

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

Pour déterminer le polynôme *minimal* de f, on cherche parmi les polynômes diviseurs du polynôme caractéristique de f, un polynôme annulateur de f de degré le plus petit (ce polynôme a exactement les mêmes racines que le polynôme caractéristique de f) puis on normalise le polynôme obtenu.

E X E M P L E

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le polynôme minimal de f.

Tout d'abord, calculons le polynôme caractéristique de f.

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X+2)^2.$$

On a deux possibilités : $m_f = (X-1)(X+2)$ ou $m_f = (X-1)(X+2)^2$.

Calculons ensuite $(M - I_3)(M + 2I_3)$, après calcul, on trouve la matrice nulle, donc $m_f = (X-1)(X+2)$.

Exercices

Déterminer le polynôme minimal de chacune des matrices carrées suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;
4. $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;
5. $E = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -12 & 6 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.12 Comment montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable en utilisant le polynôme minimal ?

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

Pour montrer que f est diagonalisable, on peut montrer que le polynôme minimal de f est scindé et a toutes ses racines simples. En fait, f est diagonalisable si et seulement si le polynôme minimal de f est scindé et a toutes ses racines simples.

Pour montrer qu'une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable, on peut montrer que son polynôme minimal est scindé et a toutes ses racines simples. En fait, une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et a toutes ses racines simples.

E X E M P L E

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$ est

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

D'après l'exercice 2 de la méthode 11, le polynôme minimal de f est

$$m_f=(X-1)(X-2)^2 .$$

Par suite f n'est pas diagonalisable.

Exercices

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 194.

4.13 Comment diagonaliser une matrice carrée ?

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, B la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour diagonaliser M, on procède comme suit

1. On cherche les valeurs propres de M

   • Si M est triangulaire ou diagonale, les valeurs propres de M se lisent sur la diagonale.

   • Si M est inversible, 0 est valeur propre de M.

   • Si M est symétrique réelle, toutes les valeurs propres de M sont réelles et M est diagonalisable.

   • Sinon on calcule $\det(M - \lambda I_n) = P_M(\lambda)$, puis on résout l'équation $P_M(\lambda) = 0$ d'inconnue λ pour trouver toutes les valeurs propres de M.

2. • Si M admet n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable.
   • Sinon, pour chaque valeur propre λ_i, on cherche le sous-espace propre associée à λ_i. M est diagonalisable si et seulement si la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.

3. On diagonalise M
   • Si M est diagonalisable, pour chaque λ_i, désignons par B_i une base du sous-espace propre associé à λ_i et $B' = \cup_i B_i$, alors B' est une base de $\mathbb{K}^n$.

   • Si P est la matrice de passage de B à B' alors $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale. (Les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de M).

E X E M P L E

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **est diagonalisable et la diagonaliser.**

Désignons par $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et formons le polynôme caractéristique de A. On a : $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2$.
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ (valeur propre simple) et $\lambda_2 = 1$ (valeur propre double).

*) Pour la suite du corrigé de l'exemple, se reporter page : 273.

Exercices

Se reporter page : 195.

4.14 Comment calculer les puissances d'une matrice diagonalisable ?

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ diagonalisable.

Pour calculer A^m avec $m \in \mathbb{N}^*$, on cherche une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale (une telle matrice existe car A est diagonalisable), puis on pose $D = P^{-1}AP$.

On a alors $A = PDP^{-1}$ et donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A^m = PD^mP^{-1}$.

E X E M P L E

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$**. Calculer** A^n **pour** $n \in \mathbb{N}^*$.

Diagonalisons d'abord la matrice A. On a

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = (\lambda+1)(\lambda-4).$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$, donc A est diagonalisable.

Cherchons ensuite une base formée de vecteurs propres de A. Comme pour tout $(x, y) \in E$,

$(x, y) \in E_{-1} \Leftrightarrow 2x + 2y = 0$ donc $e_1 = (1, -1)$ est une base de E_{-1},

$(x, y) \in E_4 \Leftrightarrow -3x + 2y = 0$ donc $e_2 = (2, 3)$ est une base de E_4.

Il s'ensuit que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage P de la base canonique à (e_1, e_2) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et a pour inverse

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\,{}^{\mathrm{t}}(\mathrm{com}A) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}$ et par suite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (4)^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3(-1)^n + 2 \cdot 4^n & 2(-1)^{n+1} + 2 \cdot 4^n \\ 3(-1)^{n+1} + 3 \cdot 4^n & 2(-1)^n + 3 \cdot 4^n \end{pmatrix}$.

Exercices

Se reporter page : 195

4.15 Comment résoudre certains systèmes de suites récurrentes ?

Cette méthode sera illustrée sur un exemple.

Déterminons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & u_n & + & 2v_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & 2v_n \end{array} \right.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On a : $X_{n+1} = AX_n$ d'où par récurrence $X_{n+1} = A^n X_0$. On est ramené donc à calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Diagonalisons alors la matrice A. Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = (\lambda + 1)(\lambda - 4).$$

Donc A a pour valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$. D'autre part pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$(x, y) \in E_{-1} \Leftrightarrow x + 2y = -x \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow (1, -1)$ est une base de E_{-1} ;

$(x, y) \in E_4 \Leftrightarrow x + 2y = 4x \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x \Rightarrow (2, 3)$ est une base de E_4.

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, on a : $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (4)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3(-1)^n & -2(-1)^n \\ 4^n & 4^n \end{pmatrix}.$$

Ou encore pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3(-1)^n + 2 \cdot 4^n & -2(-1)^n + 2 \cdot 4^n \\ 3(-1)^{n+1} + 3 \cdot 4^n & -2(-1)^n + 3 \cdot 4^n \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (3(-1)^n + 2 \cdot 4^n) \cdot 1 + (-2(-1)^n + 2 \cdot 4^n) \cdot 2 \\ \left(3(-1)^{n+1} + 3 \cdot 4^n\right) \cdot 1 + (-2(-1)^n + 3 \cdot 4^n) \cdot 2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} u_n = \frac{1}{5}\left((3(-1)^n + 2 \cdot 4^n) \cdot 1 + (-2(-1)^n + 2 \cdot 4^n) \cdot 2\right) \\ v_n = \frac{1}{5}\left(\left(3(-1)^{n+1} + 3 \cdot 4^n\right) \cdot 1 + (-2(-1)^n + 3 \cdot 4^n) \cdot 2\right) \end{array} \right.$$

Exercices

1. Déterminer les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

   $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & u_n & + & 4v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n & + & 3v_n \end{array} \right.$

*) Pour les exercices complémentaires, se reporter page : 195.

4.16 Comment résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants ?

Soit à résoudre le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1' & = & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ x_2' & = & a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n \end{array}\right.$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables.

Sous forme matricielle, le système précédent s'écrit : où $A = (a_{ij})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Supposons que A soit diagonalisable, il existe alors une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $D = P^{-1}AP$.

On intègre ensuite le système $\tilde{X}' = D\tilde{X}$, puis on écrit $X = P\tilde{X}$.

E X E M P L E

Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1' & = & x_1 & + & 2x_2 \\ x_2' & = & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array}\right.$

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. On a : $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1' & = & x_1 & + & 2x_2 \\ x_2' & = & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array}\right.$

Ou encore $X' = AX$. Diagonalisons la matrice A. D'après l'exemple de la méthode 14, il existe une matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et une matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$. On intègre ensuite $\tilde{X}' = D\tilde{X}$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{ccc} \tilde{x}_1' & = & -\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2' & = & 4\tilde{x}_2 \end{array}\right.$

Ce qui nous donne $\left\{\begin{array}{ccc} \tilde{x}_1 & = & K_1 \mathrm{e}^{-t} \\ \tilde{x}_2 & = & K_2 \mathrm{e}^{4t} \end{array}\right.$ avec $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

D'autre part, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \mathrm{e}^{-t} + 2K_2 \mathrm{e}^{4t} \\ -K_1 \mathrm{e}^{-t} + 3K_2 \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent $\left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & K_1 \mathrm{e}^{-t} + 2K_2 \mathrm{e}^{4t} \\ x_2 & = & -K_1 \mathrm{e}^{-t} + 3K_2 \mathrm{e}^{4t} \end{array}\right.$ avec $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

Exercices

Se reporter page : 195.

4.17 Comment montrer qu'une matrice carrée ou un endomorphisme en dimension finie est trigonalisable ?

Soit M une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour montrer que M est trigonalisable, on peut montrer que le polynôme caractéristique de M est scindé.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E. Pour montrer que f est trigonalisable, on peut montrer que la matrice associée à f est trigonalisable.

E X E M P L E

Trigonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$**.**

Calculons d'abord le polynôme caractéristique de M.

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3.$$

Cherchons une base de E_2. Comme pour tout $(x, y, z) \in E$,

$$(x,y,z) \in E_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc E_2 a pour base $e_1 = (1, 1, 0)$.

Cherchons e_2, e_3 pour que $B = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que $M(f, B)$ soit triangulaire, c'est-à-dire $M(f, B) = \begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

Posons $e_2 = (x, y, z)$, on doit avoir $(f(e_2) - 2e_2) \in \operatorname{Vect}(e_1)$, cherchons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & z & = & \alpha \\ x & - & y & & & = & \alpha \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} z & = & \alpha & & \\ x & = & y & + & \alpha \end{array} \right.$$

*) Pour la suite du corrigé de l'exemple, se reporter page : 281.

Exercices

Se reporter page : 196.